

1. Zadatak: Definirati električnu snagu u matricnom obliku, u vremenskom i u kompleksnom domenu. Napisati moguće definicije kompleksne snage.

Električna mašina sadrži određen broj prostih električnih kola (namotaja) koja su međusobno galvanski izolovana, ali magnetno spregnuta [1]. U samoj mašini ova kola su otvorena, njihovi krajevi (početak i kraj) se izvode van mašine radi spajanja sa izvorom električne energije ili potrošačem, već u zavisnosti od režima rada u kome se mašina nalazi (motorski ili generatorski). Trenutna vrednost električne snage koja se preko para krajeva bilo kog namotaja u datom trenutku odvodi ili dovodi može se izraziti kao:

$$p_{ek} = i_k \cdot u_k \quad k = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (1.1)$$

gde je n ukupan broj namotaja a i_k i u_k su struja i napon k -tog namotaja. Ukupna trenutna električna snaga mašine sa n namotaja je algebarski zbir snaga za sve namotaje:

$$p_e = \sum_{k=1}^n i_k \cdot u_k. \quad (1.2)$$

Uvođenjem matricne notacije, koja podrazumeva da su trenutne vrednosti struja i napona svih namotaja grupisane u odgovarajuće vektor kolone struje i napona, lako se dobija matricna forma prethodne jednačine:

$$p_e = \underline{i}^T \cdot \underline{u} = \begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

Kako je snaga skalarna veličina, tada u vremenskom domenu važi da je:

$$p_e = p_e^T = \underline{i}^T \cdot \underline{u} = (\underline{i}^T \cdot \underline{u})^T = \underline{u}^T \cdot \underline{i}. \quad (1.4)$$

Kada su naponi i struje prostoperiodične veličine oni se mogu predstaviti i kompleksnim predstavnicima:

$$\underline{i} = \begin{bmatrix} \hat{I}_1 \\ \hat{I}_2 \\ \vdots \\ \hat{I}_n \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \vdots \\ \hat{U}_n \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Tada u jednačini za snagu (1.3) osim transpozicije mora postojati i konjugacija jednog od vektora. Postoje dve ravnopravne mogućnosti za definiciju kompleksne snage [1], [2]:

Prva – konjugacija struje.

$$\hat{S} = \underline{i}^{T*} \cdot \underline{u} = \sum_{k=1}^n \hat{I}_k^* \cdot \hat{U}_k. \quad (1.6)$$

Pošto važi da je:

$$\hat{U}_k = U_k e^{j\theta_k}, \quad \hat{I}_k = I_k e^{j\psi_k}, \quad (1.7)$$

kompleksna snaga k -tog namotaja će biti:

$$\hat{S}_k = \hat{I}_k^* \hat{U}_k = I_k e^{-j\psi_k} \cdot U_k e^{j\theta_k} = I_k U_k e^{j(\theta_k - \psi_k)} = I_k U_k e^{j\varphi_k}. \quad (1.8)$$

Prethodnu jednačinu moguće je naravno zapisati i u razvijenom trigonometrijskom obliku kao:

$$\hat{S}_k = U_k I_k \cdot \cos\varphi_k + j U_k I_k \cdot \sin\varphi_k = P_k + jQ_k. \quad (1.9)$$

Ova definicija kompleksne snage se koristi u okviru ovog predmeta.

Druga – konjugacija napona.

Ova definicija kompleksne snage glasi:

$$\hat{S} = \underline{i}^T \cdot \underline{u}^* = \sum_{k=1}^n \hat{I}_k \cdot \hat{U}_k^*. \quad (1.10)$$

Kompleksna snaga k -tog namotaja u ovom slučaju će biti:

$$\hat{S}_k = \hat{U}_k^* \cdot \hat{I}_k = U_k e^{-j\theta_k} \cdot I_k e^{j\psi_k} = U_k \cdot I_k e^{-j(\theta_k - \psi_k)} = U_k \cdot I_k e^{-j\varphi_k}. \quad (1.11)$$

Prethodna jednačina zapisana u razvijenom trigonometrijskom obliku je:

$$\hat{S}_k = U_k I_k \cos\varphi_k - j U_k I_k \sin\varphi_k = P_k - jQ_k. \quad (1.12)$$

Ova definicija kompleksne snage se uobičajeno koristi u analizi tokova snaga elektro energetskeg sistema.

Kako je pokazano, za definiciju kompleksne snage postoje dve ravnopravne mogućnosti navedene u jednačinama (1.6) i (1.10). U obe mogućnosti realni delovi su aktivna snaga. Reaktivna snaga jednom se određuje kao broj koji se nalazi iza $+j$ u (1.9), a drugi put ta ista vrednost reaktivne snage se dobija kao broj iza $-j$ u (1.12), [2].

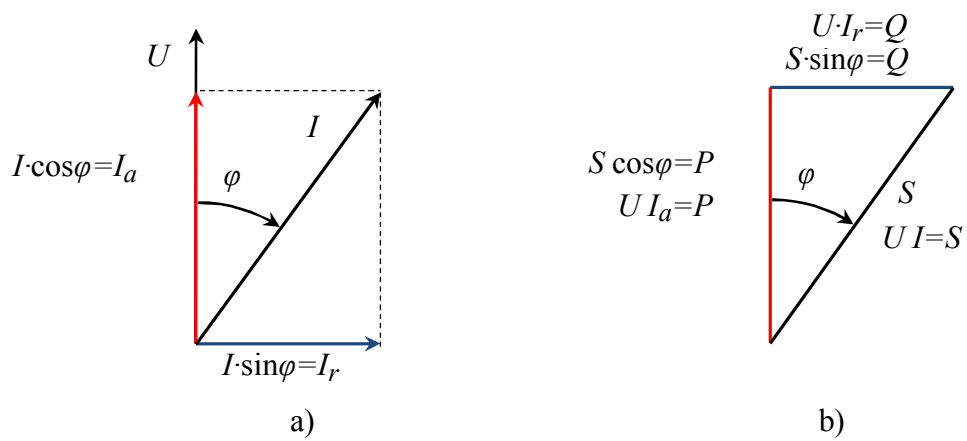
Predznak kompleksne snage (plus ili minus) potiče od usaglašenosti referentnih smerova napona i struje. Usaglašenost smerova napona i struje daje pozitivnu kompleksnu snagu u slučaju kada ona ulazi u mašinu. Referentni smerovi aktivne i reaktivne snage se uvek poklapaju sa referentnim smerom za kompleksnu snagu. Snaga je pozitivna kada ulazi u mašinu $P > 0$ i $Q > 0$, tj. kada se troše aktivna i reaktivna snaga.

Modul kompleksne snage je prividna snaga. Nezavisno od definicije kompleksne snage prividna snaga je:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}. \quad (1.13)$$

Na slici 1.1. prikazan je vektorski dijagram napona i struje. Fazor struje se može razložiti na dve komponente. Projekcija na fazor napona predstavlja aktivnu komponentu struje I_a dok je njena projekcija na ortogonalnu osu reaktivna komponenta struje I_r . Uobičajeno se ove komponente struje nazivaju **aktivna** i **reaktivna** struja i koriste se pri izučavanju električnih mašina naizmenične struje.

Treba primetiti da se aktivna i reaktivna snaga mogu odrediti jednostavnim množenjem aktivne i reaktivne struje sa naponom, što je prikazano na slici 1.1 trougлом snaga za naizmenične struje.



Slika 1.1. Vektorski dijagram napona i struje a), trougao snage b).

2. Zadatak: Izračunati gustinu energije polja u vazдушnom zazoru:

- a) Elektrostatičke mašine ako je električno polje $E = 30 \text{ kV/cm}$.
 - b) Elektromagnetne mašine ako je indukcija $B = 1 \text{ T}$.
-

Da bi se električnim putem proizvela mehanička sila, između dva kruta tela, mora postojati sprežno polje u prostoru (vazдушnom zazoru) između tela. Sredina u kojoj postoji polje predstavlja skladište energije. Energija se može uskladištiti bilo u magnetnom bilo u električnom sprežnom polju. Promena energije spreznog polja praćena je pojavom sile. Ova sila u elektromehaničkim pretvaračima je električne ili magnetne prirode. Kada se koriste električne sile tada se odgovarajuće mašine nazivaju elektrostatičkim, a kada se koriste magnetne sile nazivaju se elektromagnetnim mašinama (pretvaračima).

a) **Električno polje kao sprežno polje.** U elektrostatičkoj mašini elektromehaničko pretvaranje postoji zahvaljujući električnom polju. Ovo polje postoji između elektroda i uzrok je pojave sile koje deluju na elektrode. Ako postoji mogućnost da se neka od elektroda pomeri tada je proizvod sile i pomeraja mehanički rad. Mehanički rad se dobija na račun električne energije polja ili rada električnog izvora na koji su elektrode priključene [3].

Gustina energije u električnom polju u linearnom dielektriku bez gubitaka (kao što je vazduh) je:

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \cdot E^2, \quad (2.1)$$

gde je V zapremina sredine u kojoj postoji električno polje, odnosno u ovom slučaju zapremina vazдушnog zazora elektrostatičke mašine, a $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ je dielektrična konstanta (permitivnost) vazduha. Gustina energije u vazдушnom zazoru date elektrostatičke mašine iznosi:

$$w_e = \frac{1}{2} 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot (3 \cdot 10^6)^2 = 3,98 \cdot 10^1 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}. \quad (2.2)$$

Treba primetiti da data jačina električnog polja od $E = 30 \text{ kV/cm}$ u vazduhu predstavlja gornju granicu električne čvrstine pri atmosferskom pritisku. Iznad ove vrednosti električnog polja dolazi do električnog proboja.

b) **Magnetno polje kao sprežno polje.** Elektromehaničko pretvaranje postoji zahvaljujući dejstvu magnetnog polja na pokretne namotaje i delove feromagnetika [3].

Gustina energije magnetnog spreznog polja je:

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \int_0^B H dB. \quad (2.3)$$

U homogenoj linearnoj sredini (kao što je vazduh) permeabilnost je konstantna to jest $\mu_0 = B/H = \text{const}$, pa je gustina energije u vazдушnom zazoru date elektromagnetne mašine:

$$w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} = 3,98 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}, \quad (2.4)$$

gde je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ magnetna permeabilnost vazduha.

Gustina energije magnetnog polja zavisi od magnetne indukcije. Pojava zasićenja u magnetnom jezgri ograničava maksimalne vrednosti indukcije u vazdušnom zazoru, na vrednosti $1,7 \div 2$ T. Po uslovu zadatka vrednost elektromagnetne indukcije je $B = 1$ T što se jednostavno dostiže u realnim izvedbama električnih mašina.

Snaga elektromehaničkog pretvarača zavisi od gustine energije sprežnog polja. Za zadata zapreminu veću snagu ima pretvarač sa većom gustinom energije. Kada je snaga pretvarača zadata, manju dimenziju će imati pretvarač sa većom gustinom energije. Odnos gustina energije u vazdušnom zazoru date elektromagnetne i elektrostatičke mašine iznosi:

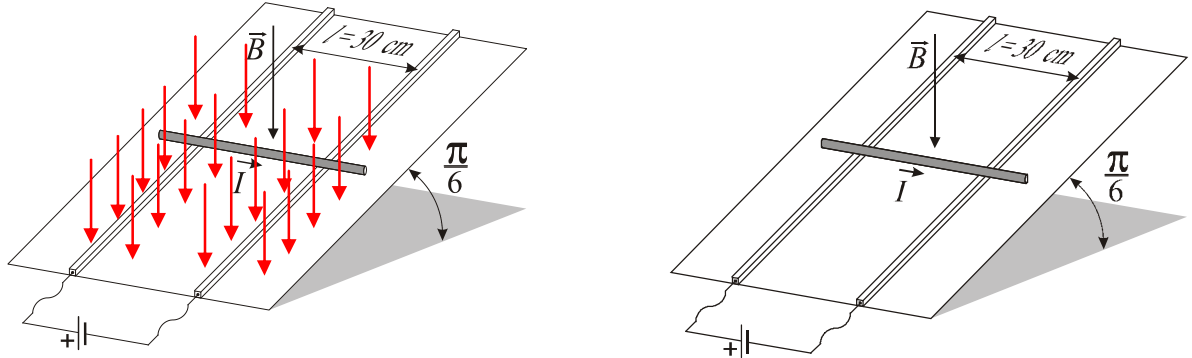
$$\frac{w_m}{w_e} = \frac{B^2}{\varepsilon_0 \mu_0 E^2} \approx 10^4. \quad (2.5)$$

Prethodna jednačina ukazuje da ukoliko bi se htelo postići da elektrostatička mašina ima istu energiju u vazdušnom zazoru kao i elektromagnetna, morala bi da bude 10^4 puta veće zapremine. Ovde leži odgovor na pitanje zašto se ne primenjuju elektrostatičke mašine. Elektrostatička mašina za konverziju električne energije u mehaničku i obratno nema praktičan značaj upravo zbog toga što je gustina energije u elektrostatičkom polju mala.

4. Zadatak: Dve paralelne šine postavljene su pod uglom $\pi/6$ prema horizontali, i nalaze se u homogenom vertikalnom magnetnom polju indukcije $B = 0,2 \text{ T}$, na rastojanju $l = 30 \text{ cm}$ jedna od druge. Normalno na šine, preko njih, postavljena je šipka otpornosti $R = 0,1 \Omega$ i mase $\mathcal{M} = 50 \text{ g}$. Između šina priključen je izvor jednosmernog napona. Otpornost izvora i šina se zanemaruje. Uticaj sile trenja se može zanemariti. Odrediti:

- Vrednost napona izvora potrebnog da šipka miruje na šinama.
- Ustaljenu brzinu kretanja, ako se napon izvora udvostruči u odnosu na deo pod a).

- Na slici 4.1. je skiciran izgled sistema opisan u postavci zadatka.



Slika 4.1. Izgled sistema.

Najpre je potrebno sagledati koje sile deluju na šipku. Očigledno je da na šipku deluje gravitaciona sila (sila teže):

$$\vec{G} = \mathcal{M} \cdot \vec{g}. \quad (4.1)$$

Šipka zajedno sa šinama i izvorom jednosmernog napona U formira zatvoreno električno kolo kroz koje protiče jednosmerna struja jačine:

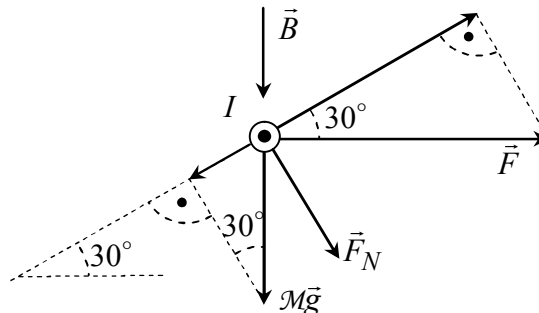
$$I = \frac{U}{R}. \quad (4.2)$$

Po uslovu zadatka šipka i šine se nalaze u homogenom, vertikalnom magnetnom polju indukcije $\vec{B}$. Na šipku kroz koju protiče struja I deluje i elektromagnetna sila:

$$\vec{F} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B}). \quad (4.3)$$

Vektor $\vec{l}$ ima pravac šipke, a smer mu se poklapa sa smerom struje.

Pravac i smer delovanja ovih sila na šipku sa strujom I prikazan je na slici 4.2. gde je dat bočni pogled na sistem sa slike 4.1.



Slika 4.2. Ilustracija sila koje deluju na šipku.

Kako su vektor indukcije $\vec{B}$ i vektor $\vec{l}$ (pravac provodnika) međusobno upravni, intenzitet elektromagnetne sile je:

$$F = B \cdot l \cdot I \cdot \sin \angle(\vec{l}, \vec{B}) = B \cdot l \cdot I \cdot \sin 90^\circ = B \cdot l \cdot I. \quad (4.4)$$

Ako šipka miruje, i da bi se to stanje mirovanja i na dalje održalo, potrebno je da na šipku deluje uravnotežen sistem sila. Kako sile $\vec{F}$ i $\vec{G}$ leže u ravni, to je za ravnotežu sila potrebno i dovoljno da suma projekcija sila na dve ortogonalne ose bude jednaka nuli. Prema upravo navedenom, ako jednu osu postavimo duž šine, tada se uz pomoć slike 4.2. može napisati:

$$F \cdot \cos 30^\circ - \mathcal{M} \cdot g \sin 30^\circ = 0. \quad (4.5)$$

Uvrštavanjem jednačine (4.4) u (4.5) uz uvažavanje (4.2) dobije se:

$$B \cdot l \frac{U}{R} \cos 30^\circ = \mathcal{M} \cdot g \sin 30^\circ. \quad (4.6)$$

Iz jednačine (4.6) se jednostavno može odrediti vrednost napona U pri kojem šipka miruje:

$$U = \frac{\mathcal{M} \cdot g \cdot R}{B \cdot l} \cdot \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{50 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 0,1}{0,3 \cdot 0,2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 0,472 \text{ V}. \quad (4.7)$$

tada prema (4.2) kroz šipku teče struja:

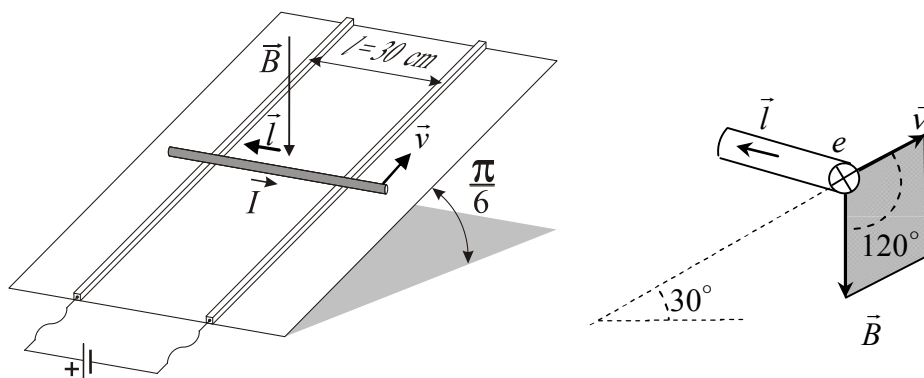
$$I = \frac{U}{R} = \frac{0,472}{0,1} = 4,72 \text{ A}. \quad (4.2)$$

Ravnoteža sila koja deluju na neko telo je potreban, ali ne i dovoljan uslov da bi telo mirovalo. Telo će mirovati samo ako je mirovalo u trenutku kada je ravnoteža sila nastala. Dok, ako se kretalo, kada je ravnoteža sila nastala, telo će nastaviti da se kreće tom brzinom.

b) Ako se šipka na strmoj ravni nalazi u stanju mirovanja kao što je opisno u delu pod a) i tada se napon izvora udvostruči, povećaće se struja kroz šipku, što će dovesti do povećanja elektromagnetne sile koja deluje na šipku. Sada je narušena ravnoteža sila iskazana jednačinom (4.5). Kao rezultat povećanja elektromagnetne sile, šipka će početi da se kreće ubrzano, brzinom $\vec{v}$ duž šina na strmoj ravni, kao što je naznačeno na slici 4.3.

Ovo kretanja šipke je opisano jednačinom kretanja (drugi Njutnov zakon mehanike):

$$\mathcal{M} \frac{dv}{dt} = F \cos 30^\circ - \mathcal{M} \cdot g \sin 30^\circ. \quad (4.8)$$



Slika 4.3. Izgled sistema prilikom kretanja šipke.

Prema Faradejevom zakonu elektromagnetne indukcije u provodniku (šipci) koji se kreće u stranom homogenom magnetnom polju indukuje se elektromotorna sila:

$$e = \vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (4.9)$$

Vektori brzine $\vec{v}$ i indukcije $\vec{B}$ su upravni na provodnik (šipku), tako da se vektor $\vec{v} \times \vec{B}$ nalazi u pravcu šipke. Smer mu je određen pravilom desne zavojnice pri čemu se vektor $\vec{v}$ rotira prema $\vec{B}$. Znak indukovane elektromotorne sile e određen je usvojenim referentnim smerom za provodnik tj. vektorom $\vec{l}$. Neka se sada smer vektora $\vec{l}$ poklapa sa pozitivnim smerom obilaska strujne konture. Ovako usvojen referentni smer vektora $\vec{l}$ je suprotan od usvojenog smera u delu zadatka pod a). Na slici 4.3. prikazana je i elektromotorna sila e indukovana u šipci sa naznačenim referentnim smerom.

Uvažavajući da su vektori $\vec{v}$ i $\vec{B}$ pod međusobnim uglom od 120° , kao i usvojenu orijentaciju vektora $\vec{l}$, dobija se elektromotorna sila indukovana u šipci:

$$e = \vec{l} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = B \cdot l \cdot v \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} B \cdot l \cdot v, \quad (4.10)$$

sa smerom kao što je naznačeno na slici 4.3. Treba primetiti da indukovana elektromotorna sila zavisi od brzine provodnika.

Kada je određena indukovana elektromotorna sila može se odrediti struja koja protiče kroz šipku, koja je određena naponom izvora i indukovanom elektromotornom silom:

$$I' = \frac{2U - e}{R}. \quad (4.11)$$

Imajući na umu da se šipka kreće ubrzano (4.8) i da indukovana elektromotorna sila raste sa brzinom (4.10) to se iz jednačine (4.11) može zaključiti da će struja I' biti najveća u trenutku kada je napon napajanja udvostručen (šipka miruje) i tada ona iznosi $I' = 2U/R$. Kako brzina šipke bude rasla struja I' će se smanjivati, a samim tim i elektromagnetna sila, tako da će pri nekoj brzini ponovo nastati ravnoteža sila opisana jednačinom (4.5):

$$F \cdot \cos 30^\circ - \mathcal{M} \cdot g \sin 30^\circ = 0,$$

a šipka će nastaviti da se kreće konstantnom brzinom.

Uvrštavanjem jednačine (4.4) u (4.5) uz uvažavanje (4.11) dobije se:

$$B \cdot l \frac{2U - e}{R} \cos 30^\circ = \mathcal{M} \cdot g \sin 30^\circ. \quad (4.12)$$

Poredeći upravo datu jednačinu (4.12) koja opisuje ravnotežu sila koje deluju na šipku pri kretanju konstantnom brzinom sa jednačinom (4.6) koja opisuje ravnotežu pri mirovanju:

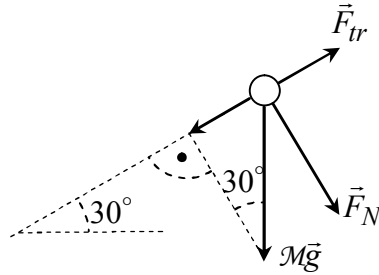
$$B \cdot l \frac{U}{R} \cos 30^\circ = \mathcal{M} \cdot g \sin 30^\circ,$$

jednostavno se izvodi zaključak da je pri dostignutoj konstantnoj brzini kretanja vrednost elektromotorne sile postala jednaka naponu ($e = U$), a struja ima istu vrednost kao u ravnoteži pri mirovanju $I' = 4,72$. Sada se uvažavajući jednačinu (4.10) može odrediti tražena konstantna brzina kretanja:

$$U = e = \frac{\sqrt{3}}{2} B \cdot l \cdot v \Rightarrow v = \frac{2U}{\sqrt{3} B \cdot l} = \frac{2 \cdot 0,472}{\sqrt{3} \cdot 0,2 \cdot 0,3} = 9,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (4.13)$$

Čitaocu se za vežbu predlaže da odgovori na pitanje: Šta je potrebno preduzeti da bi se šipka kretala istom ovom brzinom ali naniže?

U postavci zadatka je zanemareno trenje tj. koeficijent trenja je jednak nuli, $\mu_{tr} = 0$. Pod ovakvim okolnostima šipka na strmoj ravni (ali i bilo koje drugo telo), miruje samo ako na nju pored sile teže deluje još neka sila, u ovom primeru to je elektromagnetna sila. Međutim, ako trenje postoji tj. $\mu_{tr} \neq 0$ zahvaljujući sili trenja, šipka (ali i bilo koje drugo telo) na strmoj ravni može mirovati i u odsustvu elektromagnetne sile. Na slici 4.4. prikazane su sile na šipku kada je uvaženo trenje, a u odsustvu struje.



Slika 4.4. Ilustracija sile koje deluju na šipku sa uvažnim trenjem, a u odsustvu struje.

Normalna komponenta sile $\vec{F}_N$, stvara trenje:

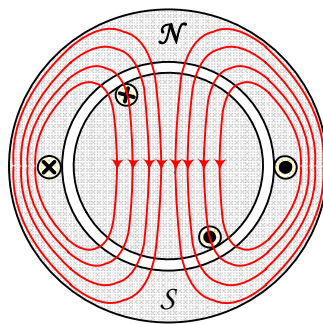
$$\vec{F}_{tr} = \mu_{tr} \cdot \vec{F}_N = \mu_{tr} \cdot M \cdot g \cos 30^\circ. \quad (4.14)$$

Šipka miruje sve dok je

$$\vec{F}_{tr} > M \cdot g \cdot \sin 30^\circ. \quad (4.15)$$

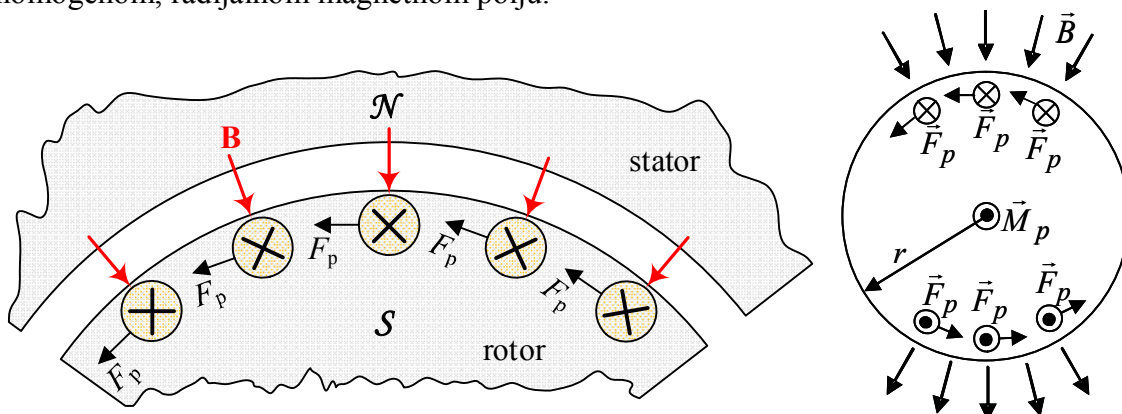
5. Zadatak: Rotor električne mašine se nalazi u homogenom magnetnom polju indukcije $B = 1,5 \text{ T}$. Namotaj na rotoru ima $N = 100$ navojaka kroz koje protiče jednosmerna struja jačine $I = 10 \text{ A}$. Dužina rotora je $l = 20 \text{ cm}$, a poluprečnik $r = 5 \text{ cm}$. Izračunati obrtni momenat koji se javlja na rotoru.

Električne mašine su najčešće cilindričnog oblika. Stator i rotor se izrađuju od feromagnetika, a između njih se nalazi vazdušni (feromagnetni) zazor. Na statoru i rotoru se nalaze namotaji sa strujama koje su izvor magnetnog polja. Uzajamnim dejstvom ova dva magnetna polja stvara se obrtni elektromagnetni momenat (poznat i kao momenat konverzije) koji izaziva pokretanje rotora i dovodi do njegovog obrtanja. Na slici 5.1. je prikazana cilindrična rotaciona mašina, sa jednim navojkom na rotoru koji se nalazi u stranom magnetnom polju indukcije B . Ovo magnetno polje potiče od struja u statorskom namotaju.



Slika 5.1. Poprečni presek cilindrične električne mašine sa jednim navojkom na rotoru i statoru.

Prema uslovu iz postavke zadatka namotaj rotora sastoji se od N navojaka. Svaki navojak čine po dva provodnika smeštena po obimu rotora. Provodnici se nalaze u dijametralno postavljenim žlebovima (jedan naspram drugog) i nalaze se u homogenom magnetnom polju indukcije B . Primenom graničnih uslova lako je izvesti jednostavan zaključak da su u vazduhu linije vektora magnetne indukcije normalne na površi feromagnetskih tela. Kako su ove površi cilindrične to je magnetna indukcija u vazdušnom zazoru radijalna. Treba primetiti da je u ovakvoj konfiguraciji vektor magnetne indukcije normalan na provodnike. Na slici 5.2. je prikazan rotor sa svojim navojcima u stranom, homogenom, radijalnom magnetnom polju.



Slika 5.2. Cilindrični rotor sa namotajem. Ilustracija pojave sila na provodnike.

Na (jedan) provodnik sa strujom u stranom magnetnom polju (prema Amperovom zakonu za magnetnu silu) deluje elektromagnetna sila:

$$\vec{F}_p = I(\vec{l} \times \vec{B}). \quad (5.1)$$

Kada se uvaži da je vektor magnetne indukcije normalan na provodnik, moduo vektora elektromagnetne sile na provodnike je:

$$F_p = B \cdot l \cdot I \cdot \sin \angle(\vec{l}, \vec{B}) = B \cdot l \cdot I \cdot \sin 90^\circ = B \cdot l \cdot I. \quad (5.2)$$

Smer elektromagnetne sile na provodnik sa strujom određen je pravilom desne zavoynice i naznačen je na slici 5.2.

Ako je r radijalno odstojanje provodnika od ose rotora, što predstavlja i krak sile, tada je odgovarajući momenat jednog provodnika:

$$\vec{M}_p = \vec{r} \times \vec{F}_p. \quad (5.3)$$

Vektor elektromagnetne sile F_p normalan je na krak sile r .

Provodnici na rotoru su postavljeni u dva pojasa (zone) kao što je pokazno na slici 5.2. Naspramni provodnici formiraju navojak. Ako se uoče naspramni provodnici sa svojim elektromagnetnim silama, može se definisati spreg sila. Momenat sprega sila (obrtni momenat) od naspramno postavljenog para provodnika (navojka) je:

$$M_{spreg} = 2r \cdot F_p \cdot \sin \angle(\vec{r}, \vec{F}_p) = 2r \cdot F_p \cdot \sin 90^\circ = 2r \cdot B \cdot l \cdot I = 2M_p. \quad (5.4)$$

Rezultantni obrtni momenat koji potiče od struje u svih N navojaka rotorskog namotaja je zbir obrtnih momenata koji deluju na pojedinačne navojke:

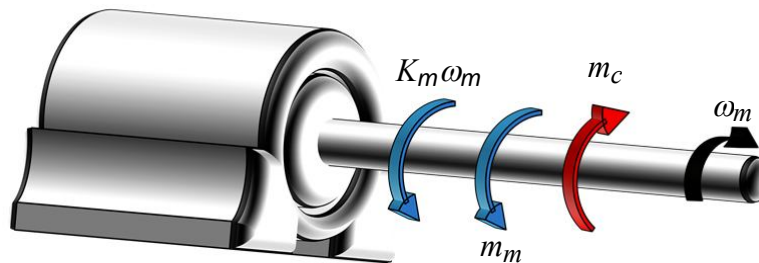
$$M_{rez} = N \cdot 2M_p = N \cdot 2r \cdot B \cdot l \cdot I = 100 \cdot 2 \cdot 0,05 \cdot 1,5 \cdot 0,2 \cdot 10 = 30 \text{ Nm}. \quad (5.5)$$

Pošto su svi M_p kolinearni, to je vektorski zbir jednak algebarskom

8. Zadatak: Električna mašina odmah po uključenju razvija konstantan elektromagnetni obrtni momenat $m_c = M_c = 30 \text{ Nm}$. Radna mašina kojom je opterećen ovaj motor ima linearnu momentnu karakteristiku $m_m = k \cdot \omega_m$, gde je $k = 0,1$. Ukupan momenat inercije motora i radne mašine iznosi $J_m = 0,01 \text{ kgm}^2$. Mehanički gubici se mogu zanemariti. Odrediti:

- Brzinu kojom će se obrtati motor u ustaljenom stanju.
- Vremensku zavisnost brzine tokom pokretanja.

a) Rotaciona električna mašina je povezana sa radnom mašinom preko vratila. Na vratilu rotacione električne mašine, sa slike 8.1. "sukobljavaju" se momenti: s jedne strane momenat koji električna mašina razvija (m_c) a sa druge strane su mehanički momenti – radne mašine (m_m) i momenat usled trenja i ventilacije. Ovde je prikazano da momenat konverzije teži da ubrza rotor dok se mehanički momenat protivi kretanju. Ovo odgovara motorskom režimu rada.



Slika 8.1. Referentni smerovi brzine i momenata na vratilu motora.

Drugi Njutnov zakon mehanike za telo sa rotacionim kretanjem i jednim stepenom slobode je:

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = \sum_i m_i = m_c - m_m - K_m \omega_m, \quad (8.1)$$

gde su:

- m_c – elektromagnetni momenat,
- m_m – momenat radne mašine (mehanički momenat),
- K_m – koeficijent trenja,
- ω_m – brzina obrtanja,
- J_m – momenat inercije.

Ako se mehanički gubici (gubici na trenje i ventilaciju) mogu zanemariti, tada u (8.1) treba uvažiti da je $K_m = 0$. Kada se uspostavi ravnoteža momenata koji deluju na vratilu motora:

$$0 = m_c - m_m, \quad (8.2)$$

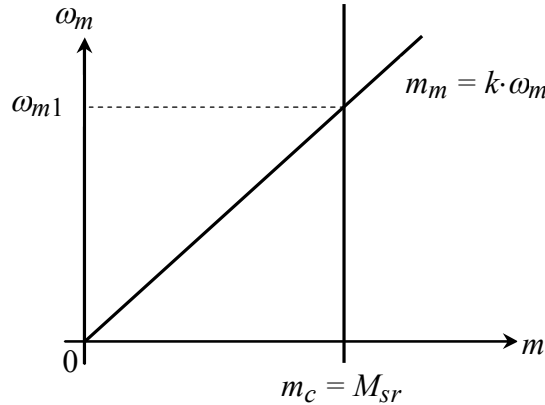
$$0 = M_c - k \cdot \omega_m. \quad (8.3)$$

postize se stacionarno stanje sa konstantnom brzinom obrtanja.

Na slici 8.2. u jedinstvenom koordinatnom sistemu $\omega(m)$ prikazane su: mehanička karakteristika motora $\omega(m_c)$ i mehanička karakteristika radne mašine $\omega(m_m)$. Stacionarna

radna tačka se nalazi u preseku ove dve mehaničke karakteristike. Jednačina (8.3) omogućuje da se odredi brzina obrtanja rotora u stacionarnom stanju:

$$\omega_m = \omega_{m1} = \frac{M_c}{k} = \frac{30}{0,1} = 300 \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (8.4)$$



Slika 8.2. Mehaničke karakteristike motora i radne mašine.

b) Da bi došlo do pokretanja motora potrebno je da momenat koji motor razvija pri pokretanju bude veći od momenta radne mašine, što je za ovaj motor zadovoljeno jer je $m_c > m_m$. Razlika momenata $m_c - k \cdot \omega_m$ je najveća u trenutku uključenja. Kako brzina raste razlika opada, da bi u stacionarnom stanju nastala ravnoteža momenata, a brzina postala konstantna i imala vrednost određenu u delu zadatka pod a). Do vremenske zavisnosti brzine tokom pokretanja može se doći polazeći od jednačine kretanja (8.1) kada se uvaži da je $K_m = 0$ i da je $m_m = k \cdot \omega_m$:

$$J_m \frac{d\omega_m}{dt} = M_c - k \cdot \omega_m, \quad (8.5)$$

dobija se diferencijalna jednačina prvog reda:

$$\frac{d\omega_m}{dt} + \frac{k}{J_m} \omega_m = \frac{M_c}{J_m}, \quad (8.6)$$

čije rešenje ima partikularni ω_{mp} i homogeni deo ω_{mh} . Kako je slobodni član u (8.6) konstanta (ne zavisi od vremena), to je partikularni deo rešenja istog oblika tj. konstanta:

$$\frac{k}{J_m} \cdot \omega_{mp} = \frac{M_c}{J_m} \Rightarrow \omega_{mp} = \frac{M_c}{k} = \omega_{m1}. \quad (8.7)$$

S obzirom na homogeni deo rešenja, brzina motora tokom pokretanja je:

$$\omega_m = \omega_{mp} + \omega_{mh} = \omega_{m1} + A \cdot e^{-\frac{k}{J_m} t}. \quad (8.8)$$

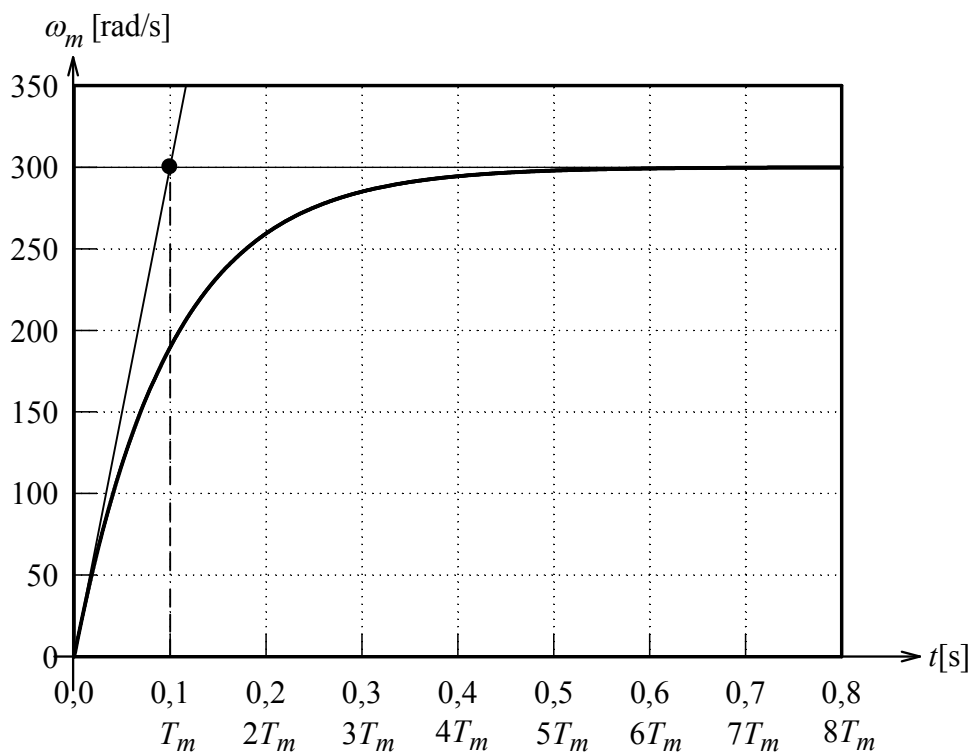
gde je ω_{m1} ustaljena vrednost brzine – brzina u stacionarnom stanju. Ako se motor pokreće iz mirovanja $\omega_m(0) = 0$ tada se lako iz ovog početnog uslova određuje nepoznata konstanta u (8.8). Uz uvažavanje da je mehanička vremenska konstanta:

$$T_m = \frac{J_m}{k} = \frac{0,01}{0,1} = 0,1 \text{ s}, \quad (8.9)$$

brzina motora tokom pokretanja je:

$$\omega_m(t) = \omega_{mp} + \omega_{mh} = \omega_{m1} \left(1 - e^{-t/T_m}\right) = 300 \left(1 - e^{-10t}\right) \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \quad (8.10)$$

Na slici 8.3. je prikazana promena brzine motora tokom pokretanja.



Slika 8.3. Vremenski odziv brzine tokom pokretanja motora.

Na slici 8.3. je prikazana i grafička interpretacija mehaničke vremenske konstante pomoću tangente i asimptote krive brzine, tzv. subtangenta. Prema jednačini (8.10) stacionarno stanje se dostiže posle beskonačno dugog vremena. U praksi se uzima da je stacionarno stanje dostignuto za $3 \div 5$ mehaničkih vremenskih konstanti jer je:

$$\omega_m(t = 3T_m) = \omega_{m1} \left(1 - e^{-3T_m/T_m}\right) = 0,95 \cdot \omega_{m1}, \quad (8.11)$$

$$\omega_m(t = 5T_m) = \omega_{m1} \left(1 - e^{-5T_m/T_m}\right) = 0,993 \cdot \omega_{m1}. \quad (8.11)$$