

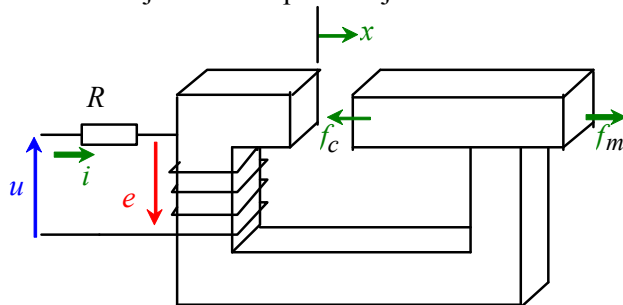
12. Zadatak: Idealni elektromagnetni rele predstavlja jednopobudni elektromehanički sistem sa translatorsnim kretanjem kod koga elementarno povećanje zazora od $\Delta x = 0,01$ m izaziva promenu induktivnosti $\Delta L = -0,05$ H pri konstantnoj jednosmernoj struji od 2 A. Odrediti:

- Elektromagnetnu silu.
- Promenu energije polja, promenu električne energije, i mehanički rad u toku opisanog kretanja.
- Kolika će biti indukovana elektromotorna sila u namotaju, ako se promena induktivnosti obavi za vreme $\Delta t = 1$ s?

Svi uređaji koji mogu da pretvaraju mehaničku energiju u električnu ili obrnuto nazivaju se elektromehaničkim pretvaračima energije. Postoji velika raznolikost u veličini, izgledu i nameni ovih pretvarača, ali je rad svih njih zasnovan na istim osnovnim principima. Elektromehanički pretvarači mogu da koriste bilo električne bilo magnetne sile. Ukoliko se rad elektromehaničkih pretvarača zasniva na korišćenju magnetnih sila onda se oni nazivaju elektromagnetnim pretvaračima.

Primena ovakvih sistema je veoma česta. To su razni releji, kontaktori i razni elektromagneti sa pokretnim delovima. Napajanje elektromagneta može biti iz izvora jednosmernog napona ili izvora naizmeničnog napona. Ako je napajanje iz izvora jednosmernog napona struja u kolu je konstantne vrednosti bez obzira na dužinu vazdušnog zazora. Tada struju ograničava samo termogena otpornost namotaja. To je elektromagnet sa konstantnom strujom. U slučaju napajanja iz izvora konstantne efektivne vrednosti naizmeničnog napona, uz zanemarenje termogene otpornosti namotaja, fluks je konstantan u elektromagnetu.

Na slici 12.1. prikazan je izgled jednopobudnog sistema – elektromagneta, koji je predmet ovog zadatka. Ovo je elementarni elektromehanički pretvarač u kome je sprega između električnog i mehaničkog podsistema ostvarena pomoću magnetnog polja. Kada postoji struja u namotaju magnetno polje deluje na pokretni deo privlačnom (mehaničkom) silom. Pošto je ova sila posledica elektromagnetnog delovanja naziva se elektromagnetna sila. Ova sila nastoji da smanji vazdušni zazor, odnosno mehaničku koordinatu. Koordinata (položaj) pokretnog dela, na slici 12.1., je označen sa x . Sa f_c , je označena elektromagnetna sila (sila konverzije), a f_m je spoljna mehanička sila koja deluje na pokretni deo. Pretpostavlja se da je sila pozitivna kada deluje u smislu povećanja mehaničke koordinate.



Slika 12.1. Izgled jednopobudnog sistema sa translatorsnim kretanjem.

a) Elektromagnetna sila (sila konverzije) na kotvu ovog jednobudnog sistema sa translatornim kretanjem je:

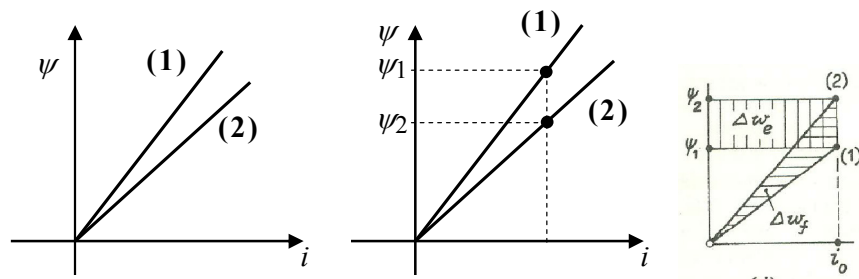
$$f_c = \frac{1}{2} I^2 \frac{dL}{dx}. \quad (12.1)$$

Kako se radi o elementarnom povećanju vazdušnog zazor, mogu se beskonačno male promene veličina (d), u izrazu (12.1), zameniti sa konačno malim promenama (Δ) i izračunati elektromagnetna sila:

$$f_c = \frac{1}{2} I^2 \frac{\Delta L}{\Delta x} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{-0,05}{0,01} = -10 \text{ N}. \quad (12.2)$$

Predznak minus u (12.2) ukazuje da elektromagnetna sila koju stvara rele deluje u suprotnom smeru od navedenog kretanja (suprotstavlja se tom kretanju) tj. sila nastoji da smanji vazdušni zazor.

b) Kada se pokretni deo pomeri iz položaja 1 u položaj 2 dolazi do uvećanja vazdušnog zazor za Δx . Na slici 12.2. prikazane su karakteristike magnećenja $\psi(i)$ za ove dve pozicije pokretnog dela. One se razlikuju zato što je vazdušni zazor u položaju 2 veći nego u položaju 1. Jasno je, da će se onda i energije magnetnog polja promeniti. Opravdano je smatrati da je celokupna energija magnetnog polja lokalizovana u vazdušnom zazoru.



Slika 12.2. Izgled jednobudnog sistema sa translatornim kretanjem.

Promena energije magnetnog polja usled povećanja koordinate pokretnog dela za Δx , je jednaka razlici energija magnetnog polja u položaju 2 i u položaju 1. Kada je struja konstantna i jednosmerna, promena energije magnetnog polja je:

$$\Delta W_p = \Delta a_e = \Delta W_{mag} = W_{mag2} - W_{mag1} = \frac{1}{2} I(\psi_2 - \psi_1), \quad (12.3)$$

što na slici 12.2. predstavlja površinu osenčenog trougla. Ako se fluksevi izraze preko induktivnosti dobija se:

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} I^2 (L_2 - L_1) = \frac{1}{2} I^2 \Delta L = \frac{1}{2} 2^2 \cdot (-0,05) = -0,1 \text{ J}. \quad (12.4)$$

Predznak minus u (12.4) ukazuje da se iz magnetnog polja oslobađa 0,1 J energije.

Električna energija koja je uložena iz izvora (ili kako se još zove promena električne energije) u ovaj jednobudni sistem, da bi se pokretni deo pomerio za Δx , uz konstantnu struju je:

$$\Delta W_{el} = I \cdot \Delta \psi = I(\psi_2 - \psi_1), \quad (12.5)$$

što na slici 12.2. predstavlja površinu osenčenog pravougaonika. Ako se fluksevi izraze preko induktivnosti dobija se:

$$\Delta W_{el} = I^2 \cdot \Delta L = 2^2 \cdot (-0,05) = -0,2 \text{ J} . \quad (12.6)$$

Iz energetskog bilansa, ako se zanemare gubici i promena mehaničke akumulacije uz usvojen motorski referentni smer za energiju, važi da je:

$$\Delta W_{el} = \Delta W_p + \Delta W_{meh} , \quad (12.7)$$

te se može odrediti promena mehaničke energije:

$$\Delta W_{meh} = \Delta W_{el} - \Delta W_p = \frac{1}{2} I(\psi_2 - \psi_1) = -0,1 \text{ J} . \quad (12.8)$$

Sa (12.7) je data relacija koja je osnov za razumevanje rada elektromagnetnih pretvarača, odnosno električnih mašina. Pomoću nje se mogu analizirati svi elektromagnetni pretvarači.

Predznak minus u (12.6) ukazuje da se radi se o generatorskom režimu jer se dobija 0,2 J električne energije. Električna energija (od 0,2 J) je dobijena na račun mehaničkog rada (od 0,1 J) i oslobađanjem akumulisane energije magnetnog polja (od 0,1 J).

Do priraštaja mehaničke energije se moglo doći i na osnovu poznavanja elektromagnetne sile (sile konverzije). Iz Njutnove jednačine kretanja za pokretni deo sistema sa slike 12.1., uz zanemarene mehaničke gubitke i konstantnu brzinu kretanja, važi da je:

$$f_m - f_c = 0 , \quad (12.9)$$

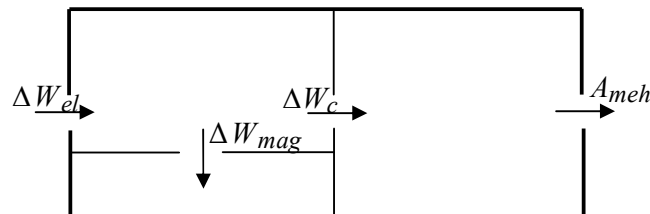
te se može izvesti zaključak da su mehanička sila i sila konverzije u ravnoteži tj. $f_m = f_c$. Priraštaj mehaničke energije i obavljen mehanički rad su sinonimi, pa je rad izvršen tokom ovog elementarnog kretanja:

$$\Delta W_{meh} = A_{meh} = f_m \cdot \Delta x = f_c \cdot \Delta x . \quad (12.10)$$

Kada se u (12.10) uvrsti (12.2) dobija se:

$$\Delta W_{meh} = A_{meh} = -10 \cdot 0,01 = -0,1 \text{ J} . \quad (12.11)$$

Pitanje predznaka za energiju u opšte, pa tako i u jednačinama (12.4), (12.6), (12.8) i (12.11), stvar je dogovora. Za energiju je usvojen pozitivan matematički referentni smer primeren motorskom režimu rada. Predznak minus za mehanički rad u (12.8) ukazuje na suprotan smer od usvojenog pozitivnog matematičkog referentnog smera što znači da ovaj jednopobudni sistem radi u generatorskom režimu rada. Na slici 12.3. je prikazan energetski bilans pretvarača, sa usvojenim pozitivnim referentnim smerovima za energiju, kada su zanemareni mehanički gubici i promena mehaničke akumulacije.



Slika 12.3. Energetski bilans.

Na osnovu ovde datih jednačina za promenu: energije polja (12.3), električne energije (12.5.) i mehaničke energije (12.8) može se izvesti sledeći generalan zaključak za elektromehaničke pretvarače. Ako je struja elektromehaničkog pretvarača konstantna promena električne energije deli se na jednake delove između magnetnog polja i mehaničkog podsistema:

$$\Delta W_p = \Delta W_{meh} = \frac{1}{2} \Delta W_{el}. \quad (12.12)$$

Samo u slučaju da je magnetno kolo linearno tj. kada magnetna permeabilnost ne zavisi od jačine magnetnog polja, ostvaruje se deoba promene energije izvora na ravne delove iskazana jednačinom (12.12). U magnetno linearnoj sredini induktivnost ne zavisi od struje (jačine magnetnog polja) već isključivo od položaja pokretnog dela. Ako magnetna indukcija u gvožđu dostigne vrednosti pri kojima se javlja magnetno zasićenje, tada induktivnost zavisi kako od položaja tako i od fluksa. U uslovima nelinearnog magnetnog kola promena energije magnetnog polja više nije data jednostavnom jednačinom kao što je (12.3), pa se onda ni promena električne energije ne deli na ravne delove između magnetnog polja i mehaničkog podsistema.

c) Na osnovu Faradejevog zakona elektromagnetne indukcije, a usled promene indukovane elektromotorne sile, u namotaju se indukuje napon iznosa:

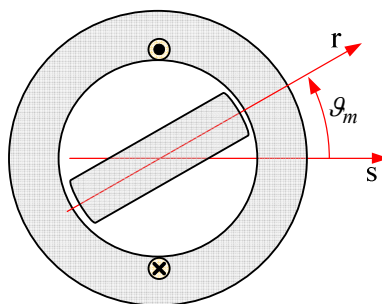
$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{d(L \cdot i)}{dt} = -\frac{\Delta L \cdot I}{\Delta t} = -\frac{(-0,05) \cdot 2}{1} = 0,1 \text{ V}. \quad (12.13)$$

Ovaj indukovani napon u namotaju mora biti poništen od strane izvora kako bi se održala konstantna struja, što obezbeđuje strujni izvor.

18. Zadatak: Jednopoludni sistem sa rotacionim kretanjem ima induktivnost $L = 0,08 + 0,05 \cos(2\vartheta_m)$ H. Kroz namotaj protiče jednosmerna struja $I = 10$ A.

- Skicirati izgled sistema i odrediti momenat konverzije.
- Koliki rad se izvrši pri promeni položaja rotora od -30° do -15° ?
- Koliki rad se izvrši pri promeni položaja rotora od -15° do -30° ?
- Šta će se desiti sa rotorom ukoliko se on optereti momentom od $2,5$ Nm?
- Šta će se desiti sa rotorom ukoliko se on optereti momentom od $-2,5$ Nm?
- U kom položaju će se zaustaviti rotor kada se ukine mehanički momenat?

a) Kako je induktivnost namotaja $L = f(2\vartheta_m)$ zaključuje se da ovaj jednopoludni sistem ima isturene polove. Ako se namotaj nalazi na statoru istureni polovi su na rotoru. Na slici 18.1. prikazan je izgled ovog jednopoludnog sistema.



Slika 18.1. Izgled jednopoludnog sistema.

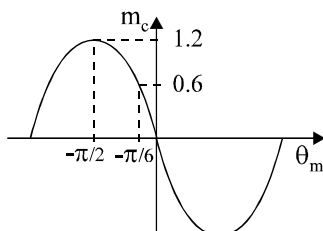
Momenat konverzije jednopoludnog sistema je:

$$m_c = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\vartheta_m}, \quad (18.1)$$

a kada se uvaži da je struja jednosmerna i kada se uvrsti međusobna induktivnost, dobija se:

$$m_c = -\frac{1}{2} 10^2 \cdot 0,05 \cdot 2 \sin 2\vartheta_m = -5 \sin 2\vartheta_m. \quad (18.2)$$

Zavisnost momenta konverzije ovog jednopoludnog sistema od položaja rotora prikazana je na slici 18.2.



Slika 18.2. Zavisnost momenta konverzije od položaja rotora.

Prema geometriji sistema, prikazanog na slici 18.1., od interesa je posmatrati uglove $-\pi/2 < \vartheta_m < \pi/2$, jer kada se rotor nađe izvan ovog intervala, zbog njegove simetrije, izgled magnetnog kola se ponavlja, tj. već je viđen sa prethodno navedenim intervalom. Iz jednačine (18.2) je očigledno da momenat konverzije deluje u smeru smanjenja mehaničke koordinate. Momenat konverzije je uvek usmeren tako da teži da rotor postavi u položaj maksimalne sopstvene induktivnosti tj. u položaj $\vartheta_m = 0^\circ$ ili $\vartheta_m = 180^\circ$, što predstavlja njegov ravnotežni položaj. Očigledno je da se u intervalu $-\pi/2 < \vartheta_m < 0$, kada se rotor kreće ka nultom položaju, vrši pretvaranje električne energije u mehaničku, što odgovara motorskom režimu rada.

b) Energija konverzije pri promeni ugla od $\vartheta_{m1} = -30^\circ$ do $\vartheta_{m2} = -15^\circ$ je:

$$W_c = \int_{\vartheta_{m1}}^{\vartheta_{m2}} m_c d\vartheta_m = -5 \int_{-30^\circ}^{-15^\circ} \sin 2\vartheta_m d\vartheta_m = \frac{5}{2} \cos 2\vartheta_m \Big|_{-30^\circ}^{-15^\circ}, \quad (18.3)$$

$$W_c = \frac{5}{2} (\cos(-2 \cdot 15) - \cos(-2 \cdot 30)) = 0,915 \text{ J}. \quad (18.4)$$

Treba primetiti da je promena ugla od $\vartheta_{m1} = -30^\circ$ do $\vartheta_{m2} = -15^\circ$ u smeru ka ravnotežnom položaju.

Na račun ove energije konverzije može se obaviti mehanički rad, tako da je $A_{meh} = W_c$. Pozitivan predznak u (18.4) ukazuje na motorski režim rada, tj. mehanička energija izlazi iz ovog elektromehaničkog pretvarača.

c) Energija konverzije pri promeni ugla od $\vartheta_{m1} = -15^\circ$ do $\vartheta_{m2} = -30^\circ$ je:

$$W_c = \int_{\vartheta_{m1}}^{\vartheta_{m2}} m_c d\vartheta_m = -5 \int_{-15^\circ}^{-30^\circ} \sin 2\vartheta_m d\vartheta_m = \frac{5}{2} \cos 2\vartheta_m \Big|_{-15^\circ}^{-30^\circ} = -0,915 \text{ J}. \quad (18.5)$$

Treba primetiti da je promena ugla od $\vartheta_{m1} = -15^\circ$ do $\vartheta_{m2} = -30^\circ$ u suprotnom smeru od ravnotežnog položaja.

Da bi se ostvarila ova energija konverzije mora se uložiti mehanički rad kako bi se rotor pomerio u suprotnom smeru od njegove prirodne težnje da se postavi u ravnotežni položaj tj. $\vartheta_m = 0^\circ$ ili $\vartheta_m = 180^\circ$. Naravno važi da je $A_{meh} = W_c$. Negativan predznak u (18.5) ukazuje na generatorski režim rada, tj. mehanička energija ulazi u ovaj elektromehanički pretvarača.

d) "Opterećenje" znači da dati mehanički momenat teži da zakrene rotor u negativnom matematičkom smeru. Prilikom izvođenja izraza za moment konverzije definisano je da on teži da vrši obrtanje u pozitivnom matematičkom smeru. Dakle u ravnoteži intenziteti mehaničkog momenta i momenta konverzije moraju biti jednaki (njihovi smerovi su suprotni) $m_m = m_c$.

Kada se rotor ovog jednopobudnog sistema optereti radnom mašinom mehaničkog momenta m_m , rotor će se zaustaviti na poziciji ϑ_m na kojoj će se izjednačiti momenat koji razvija ovaj jednopobudni sistemi sa mehaničkim momentom:

$$2,5 = m_m = m_c = -5 \sin 2\vartheta_m \Rightarrow \vartheta_m = -15^\circ. \quad (18.6)$$

Da bi se rotor pomerio iz ravnotežnog položaja $\vartheta_{m1} = 0^\circ$ na položaj $\vartheta_{m2} = -15^\circ$ potreban mehanički rad iznosi:

$$A_{meh} = \int_{\vartheta_{m1}}^{\vartheta_{m2}} m_c d\vartheta_m = \frac{5}{2} \cos 2\vartheta_m \Big|_{0^\circ}^{-15^\circ} = \frac{5}{2} [\cos(-30^\circ) - 1] = -0,335 \text{ J} . \quad (18.7)$$

e) Analogno prema delu pod d) rotor će se zaustaviti na poziciji ϑ_m :

$$-2,5 = m_m = m_c = -5 \sin 2\vartheta_m \Rightarrow \vartheta_m = 15^\circ . \quad (18.8)$$

Da bi se rotor pomerio iz ravnotežnog položaja $\vartheta_{m1} = 0^\circ$ na položaj $\vartheta_{m2} = 15^\circ$ potreban mehanički rad iznosi:

$$A_{meh} = \int_{\vartheta_{m1}}^{\vartheta_{m2}} m_c d\vartheta_m = \frac{5}{2} \cos 2\vartheta_m \Big|_{0^\circ}^{15^\circ} = \frac{5}{2} [\cos(30^\circ) - 1] = -0,335 \text{ J} . \quad (18.9)$$

Negativna vrednost za rad u (18.7) i (18.9) ukazuju da je za pomeranje rotora iz ravnotežnog položaja potrebno ulagati mehaničku energiju, što odgovara generatorskom režimu rada.

f) Kada se ukine mehanički momenta, tj. rastereti ovaj elektromehanički pretvarač, pod dejstvom momenta konverzije rotor će se zaustaviti u ravnotežnom položaju odnosno u položaju $\vartheta_m = 0^\circ$.

19. Zadatak: Jednopolubudni sistem sa rotacionim kretanjem ima induktivnost $L = 0,1 + \Delta L \cos(2\vartheta_m)$ H, gde je $\Delta L = 0,05$.

- Kroz namotaj protiče jednosmerna struja $I = 5$ A. Koliki momenat konverzije razvija sistem kada je rotor ukočen u položaju $\vartheta_m = -15^\circ$?
- Kroz namotaj protiče naizmenična struja $i = I \cos(\omega t)$ frekvencije 50 Hz gde je $I = 4$ A. Pri kojim brzinama će se razvijati srednji momenat konverzije? Koliko će iznositi ugao opterećenja δ ako se rotor optereti sa 0,1 Nm?
- Stator se preko pretvarača energetske elektronike napaja impulsnom strujom amplitude I ali samo kada je rotor u položajima $-\pi/2 + k\pi < \vartheta_m < 0 + k\pi$. Odrediti trenutnu i srednju vrednost momenta konverzije ako je $I = 4$ A.

Ako se rotor obrće konstantnom brzinom ω_m tada je pozicija rotora:

$$\vartheta_m = \int_0^t \omega_m dt = \omega_m t - \delta, \quad (19.1)$$

gde je δ ugao opterećenja - ugao između ose rotora i statora u početnom trenutku.

- Momenat konverzije jednopolubudnog sistema sa rotacionim kretanjem je:

$$m_c = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\vartheta_m}, \quad (19.2)$$

a kada se uvaži da je struja jednosmerna i kada se uvrsti međusobna induktivnost, dobija se:

$$m_c = -\frac{1}{2} I^2 \Delta L \cdot 2 \sin 2\vartheta_m = -\frac{1}{2} 5^2 \cdot 0,05 \cdot 2 \sin 2\vartheta_m = -1,25 \sin 2\vartheta_m. \quad (19.3)$$

Kada je rotor ukočen u položaju $\vartheta_m = -15^\circ$ ovaj sistem razvija momenat konverzije od:

$$m_c(\vartheta_m = -15^\circ) = -1,25 \sin(-2 \cdot 15^\circ) = 0,625 \text{ Nm}. \quad (19.4)$$

- Kada je struja kroz namotaj naizmenična $i = I \cos(\omega t)$ prema (19.2) trenutna vrednost momenta konverzije je:

$$m_c = -\frac{1}{2} (I \cos \omega t)^2 \Delta L \cdot 2 \sin 2\vartheta_m = -\Delta L \cdot I^2 \frac{1 + \cos 2\omega t}{2} \sin 2(\omega_m t - \delta),$$

$$m_c = -\frac{\Delta L \cdot I^2}{2} [\sin 2(\omega_m t - \delta) + \cos 2\omega t \cdot \sin 2(\omega_m t - \delta)],$$

$$m_c = -\frac{\Delta L \cdot I^2}{2} \left[\sin 2(\omega_m t - \delta) + \frac{1}{2} \sin 2(\omega_m t - \delta + \omega t) + \frac{1}{2} \sin 2(\omega_m t - \delta - \omega t) \right]. \quad (19.5)$$

Srednja vrednost momenta konverzije definisana je kao:

$$M_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_c dt. \quad (19.6)$$

Obzirom da su svi sabirci u (19.5) sinusne funkcije integral u (19.6), odnosno srednji momenat konverzije, biće različit od nule ako argument neke od sinusnih funkcija ne zavisi od vremena.

Za nekoliko vrednosti brzine ω_m postoji $M_{sr} \neq 0$.

Ako je $\omega_m = 0$, tada je srednji momenat konverzije:

$$M_{sr} = \frac{\Delta L \cdot I^2}{2} \sin 2\delta = \frac{0,05 \cdot 4^2}{2} \sin 2\delta = 0,4 \sin 2\delta = M_{sr \max} \sin 2\delta. \quad (19.7)$$

Kada se pri ovoj vrednosti brzine obrtanja rotor optereti mehaničkim opterećenjem $m_m = 0,1$ Nm ugao opterećenja će iznositi:

$$\delta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{m_m}{M_{sr \max}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{0,1}{0,4} = 7,24^\circ. \quad (19.8)$$

Ako je $\omega_m = \pm \omega$, tada je srednji momenat konverzije:

$$M_{sr} = \frac{M_{sr \max}}{2} \sin 2\delta. \quad (19.9)$$

Kada se pri ovoj brzini obrtanja rotor optereti mehaničkim opterećenjem $m_m = 0,1$ Nm ugao opterećenja će iznositi:

$$\delta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{m_m}{0,5 M_{sr \max}} = \frac{1}{2} \arcsin \frac{0,1}{0,5 \cdot 0,4} = 15^\circ. \quad (19.10)$$

c) Ako je struja kroz namotaj impulsnog karaktera:

$$i = \begin{cases} I & -\pi/2 + k\pi < \vartheta_m < 0 + k\pi \\ 0 & 0 + k\pi < \vartheta_m < \pi/2 + k\pi \end{cases}, \quad (19.11)$$

i njena vrednost zavisi od pozicije rotora, tada je i momenat konverzije ovog jednopobudnog sistema prema (19.2) takođe impulsnog karaktera:

$$m_c = \begin{cases} -I^2 \Delta L \sin 2\vartheta_m & -\pi/2 + k\pi < \vartheta_m < 0 + k\pi \\ 0 & 0 + k\pi < \vartheta_m < \pi/2 + k\pi \end{cases}. \quad (19.12)$$

Srednja vrednost momenta konverzije je:

$$M_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T m_c dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} m_c d\vartheta_m = -\frac{I^2 \Delta L}{\pi} \int_{-\pi/2}^0 \sin 2\vartheta_m d\vartheta_m = \frac{I^2 \Delta L}{2\pi} \cos 2\vartheta_m \Big|_{-\pi/2}^0, \quad (19.13)$$

$$M_{sr} = \frac{I^2 \Delta L}{2\pi} \left[\cos 0 - \cos \left(-2 \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{I^2 \Delta L}{\pi} = \frac{4^2 \cdot 0,05}{\pi} = 0,255 \text{ Nm}. \quad (19.14)$$

Na slici 19.1. prikazani su momenat konverzije i struja u namotaju zavisno od položaja rotora.