

Matematički model u dq domenu – naponsko napajanje

Matematički model naponski napajane *AM* se sastoji od skupa diferencijalnih i algebarskih jednačina koje opisuju proces elektromehaničke konverzije energije.

Model je dat jednačinama (1)–(7) u vektorskoj notaciji u sinhrono–rotirajućem *dq* koordinatnom sistemu osa:

- (Diferencijalne) jednačine naponske ravnoteže namotaja statora (1) i rotora (2):

$$\mathbf{u}_s = R_s \cdot \mathbf{i}_s + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_s + j\omega_{dq} \cdot \boldsymbol{\psi}_s \quad (1)$$

$$\mathbf{u}_r = R_r \cdot \mathbf{i}_r + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_r + j(\omega_{dq} - \omega) \cdot \boldsymbol{\psi}_r = \mathbf{0} \quad (2)$$

- (Algebarske) jednačine fluksnih obuhvata namotaja statora (3) i rotora (4):

$$\boldsymbol{\psi}_s = L_s \cdot \mathbf{i}_s + L_m \cdot \mathbf{i}_r \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\psi}_r = L_m \cdot \mathbf{i}_s + L_r \cdot \mathbf{i}_r \quad (4)$$

- (Diferencijalne) jednačine mehaničke ravnoteže (5) i definicioni obrazac koji povezuje koordinate električne brzine obrtanja i ugla rotora (6):

$$m_{el} - m_{opt} = \frac{J}{P} \cdot \frac{d\omega}{dt} + k_\omega \cdot \omega + k_\theta \cdot \theta \quad (5)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

- Definicioni obrazac za momenat konverzije mašine (7):

$$m_{el} = \frac{3}{2} P \cdot \frac{L_m}{L_r} \cdot |\boldsymbol{\psi}_r \times \mathbf{i}_s| \quad (7)$$

gde su terminalne varijable mašine:

- $\mathbf{u}_s = [u_{sd} \ u_{sq}]^T$ – vektor napona statora;
- $\mathbf{u}_r = [u_{rd} \ u_{rq}]^T$ – vektor napona rotora;
- $\mathbf{i}_s = [i_{sd} \ i_{sq}]^T$ – vektor struje statora;
- $\mathbf{i}_r = [i_{rd} \ i_{rq}]^T$ – vektor struje rotora;
- $\boldsymbol{\psi}_s = [\psi_{sd} \ \psi_{sq}]^T$ – vektor fluksnog obuhvata statora;
- $\boldsymbol{\psi}_r = [\psi_{rd} \ \psi_{rq}]^T$ – vektor fluksnog obuhvata rotora;
- $\omega_{dq}, \omega, \theta$ – sinhrona ugaona brzina (brzina *dq* sistema), električna ugaona brzina obrtanja i električni ugao rotora, respektivno;
- m_{el}, m_{opt} – elektromagnetni momenat mašine i momenat opterećenja, respektivno;

uz koeficijente modela redom:

- R_s, R_r – električne otpornosti namotaja statora i rotora, respektivno;
- L_s, L_r, L_m – sopstvene induktivnosti namotaja statora i rotora i međusobna induktivnost, respektivno;
- J – mehanički momenat inercije;
- P – broj pari polova *AM*;
- k_ω – koeficijent sile trenja;
- k_θ – koeficijent sile istezanja opruge ili torzije.

Izvođenje matematičkog modela AM u dq domenu u prostoru stanja

Za potrebe razvijanja simulacionih modela kao i analize dinamičkih procesa neophodno je model prevesti u formu prostora stanja sa *odgovarajućim* promenljivama stanja.

Elektromagnetni podsistem (1) – (4) nelinearnog sistema (1) – (7) će se predstaviti u formi prostora stanja sa promenljivama stanja $\mathbf{i}_s$ i $\mathbf{\psi}_r$ i sa tretmanom ugaone brzine obrtanja rotora ω i obrtnog polja ω_{dq} kao adaptivnih parametara. Konstatacije koje idu u prilog ovome glase:

- Vektor struje statora $\mathbf{i}_s$ je merljivi vektor u sistemu i postoji direktni uticaj, za razliku od vektora struje rotora $\mathbf{i}_r$, na ovaj vektor kroz upravljački ulaz $\mathbf{u}_s$;
- Vektor fluksa rotora $\mathbf{\psi}_r$, slično vektoru fluksa statora $\mathbf{\psi}_s$, nije merljiv niti direktno upravljiv ali se sporije menja (vremenska konstanta kola rotora je veća od vremenske konstante kola statora) te je pogodniji kao promenljiva stanja za razmatranje;
- Uz orijentaciju polja (dq sistema) na vektor fluksa rotora $\mathbf{\psi}_r$, moguće je dobiti značajnu redukciju kompleksnosti forme modela kao i indirektnu procenu istog fluksa kroz upravljivi vektor struje statora $\mathbf{i}_s$.

Skup jednačina (8) koristi jednačine (2), (3) i (4) i izražava vektore struje rotora $\mathbf{i}_r$, fluksa statora $\mathbf{\psi}_s$, i prvog vremenskog izvoda fluksa rotora $d\mathbf{\psi}_r/dt$ preko promenljivih stanja $\mathbf{i}_s$ i $\mathbf{\psi}_r$:

$$\begin{aligned}\mathbf{\psi}_r &= L_m \mathbf{i}_s + L_r \mathbf{i}_r \rightarrow \mathbf{i}_r = \frac{\mathbf{\psi}_r - L_m \mathbf{i}_s}{L_r}, \\ \mathbf{\psi}_s &= L_s \mathbf{i}_s + L_m \frac{\mathbf{\psi}_r - L_m \mathbf{i}_s}{L_r} = \left(L_s - \frac{L_m^2}{L_r} \right) \mathbf{i}_s + \frac{L_m}{L_r} \mathbf{\psi}_r = L_\sigma \mathbf{i}_s + \frac{L_m}{L_r} \mathbf{\psi}_r, \\ \frac{d}{dt} \mathbf{\psi}_r &= -R_r \mathbf{i}_r - j(\omega_{dq} - \omega) \mathbf{\psi}_r = -R_r \frac{\mathbf{\psi}_r - L_m \mathbf{i}_s}{L_r} - j(\omega_{dq} - \omega) \mathbf{\psi}_r = \frac{L_m}{T_r} \mathbf{i}_s - \left(\frac{1}{T_r} + j(\omega_{dq} - \omega) \right) \mathbf{\psi}_r\end{aligned}\quad (8)$$

gde su $L_\sigma = [1 - L_m^2/(L_s L_r)] L_s$ ekvivalentna induktivnost rasipanja i $T_r = L_r/R_r$ vremenska konstanta rotorskog kola AM.

Ubacivanjem (8) u (1) i (2), model dobija formu u vidu diferencijalnih spregnutih jednačina (9) i (10) sa promenljivama stanja $\mathbf{i}_s$ i $\mathbf{\psi}_r$ i upravljačkim vektorom $\mathbf{u}_s$.

$$\mathbf{u}_s = R_\sigma \mathbf{i}_s + L_\sigma \frac{d}{dt} \mathbf{i}_s + j\omega_{dq} L_\sigma \mathbf{i}_s - \frac{L_m}{T_r L_r} (1 - j\omega T_r) \mathbf{\psi}_r \quad (9)$$

$$\mathbf{\psi}_r + T_r \frac{d}{dt} \mathbf{\psi}_r + j(\omega_{dq} - \omega) T_r \mathbf{\psi}_r - L_m \mathbf{i}_s = 0 \quad (10)$$

uz definiciju električne otpornosti ekvivalentnog namotaja AM kao $R_\sigma = R_s + R_r(L_m^2/L_r^2)$.

Ovakav sistem diferencijalnih jednačina se može predstaviti u prostoru stanja u matičnom obliku samo ukoliko se terminalne varijable ω_{dq} i ω tretiraju kao promenljivi (adaptivni) parametri sistema. Odgovarajućom matematičkom transformacijom dobija se sistem (11) – (12):

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i}_s = - \left(\frac{R_\sigma}{L_\sigma} + j\omega_{dq} \right) \mathbf{i}_s + \frac{L_m}{T_r L_r L_\sigma} (1 - j\omega T_r) \mathbf{\psi}_r + \frac{1}{L_\sigma} \mathbf{u}_s \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\psi}_r = \frac{L_m}{T_r} \mathbf{i}_s - \left(\frac{1}{T_r} + j(\omega_{dq} - \omega) \right) \mathbf{\psi}_r \quad (12)$$

koji se može zapisati direktno u matičnoj notaciji prostora stanja ($\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}$) kao:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{\psi}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_\sigma/L_\sigma \mathbf{I} - j\omega_{dq} & L_m/(T_r L_r L_\sigma) (\mathbf{I} - j\omega T_r) \\ L_m/T_r \mathbf{I} & -1/T_r \mathbf{I} - j(\omega_{dq} - \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_s \\ \mathbf{\psi}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_\sigma \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_s \quad (13)$$

gde su matrice $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$ i $\mathbf{O}$ definisane kao:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Kompleksni model (13) sa vektorskom notacijom se, nakon raspredzavanja na d i q ose sinhrono–rotirajućeg dq koordinatnog sistema, prevodi u realni model pogodan za razvoj na simulacijama.

Elektromagnetni podsistem (1) – (4) nelinearnog sistema (1) – (7) će se predstaviti u formi prostora stanja sa promenljivama stanja i_{sd} , i_{sq} , ψ_{rd} i ψ_{rq} i upravljačkim ulazom u vidu vektora napona statora sa komponentama u_{sd} i u_{sq} :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/T_\sigma & \omega_{dq} & L_m/(T_r L_r L_\sigma) & \omega L_m/(L_r L_\sigma) \\ -\omega_{dq} & -1/T_\sigma & -\omega L_m/(L_r L_\sigma) & L_m/(T_r L_r L_\sigma) \\ L_m/T_r & 0 & -1/T_r & (\omega_{dq} - \omega) \\ 0 & L_m/T_r & -(\omega_{dq} - \omega) & -1/T_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \\ \psi_{rd} \\ \psi_{rq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_\sigma & 0 \\ 0 & 1/L_\sigma \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} \quad (15)$$

gde je $T_\sigma = L_\sigma/R_\sigma$ ekvivalentna vremenska konstanta statorskog kola AM .

Mehanički podsistem (5) – (7) nelinearnog sistema (1) – (7) će se predstaviti u formi prostora stanja sa promenljivama stanja ω i θ i upravljačkim ulazom u vidu vektora momenta koga sačinjavaju elektromagnetni moment m_e i poremećaj u vidu momenta opterećenja m_{opt} :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\omega P/J & -k_\theta P/J \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P/J & -P/J \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_e \\ m_{opt} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Predstava modela AM putem dva međusobno spregnuta dinamička sistema u matričnoj formi prostora stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = (\mathbf{A}_1^{const} + \mathbf{A}_1^{\omega_{dq}} + \mathbf{A}_1^\omega) \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}_1$$

$$y_1 = f_2(\mathbf{x}_1)$$

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^{const} + \mathbf{A}_1^{\omega_{dq}} + \mathbf{A}_1^\omega = f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} -1/T_\sigma & \omega_{dq} & L_m/(T_r L_r L_\sigma) & \omega L_m/(L_r L_\sigma) \\ -\omega_{dq} & -1/T_\sigma & -\omega L_m/(L_r L_\sigma) & L_m/(T_r L_r L_\sigma) \\ L_m/T_r & 0 & -1/T_r & (\omega_{dq} - \omega) \\ 0 & L_m/T_r & -(\omega_{dq} - \omega) & -1/T_r \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_\sigma} & 0 & \frac{L_m}{T_r L_r L_\sigma} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_\sigma} & 0 & \frac{L_m}{T_r L_r L_\sigma} \\ \frac{L_m}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & 0 \\ 0 & \frac{L_m}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix} + \omega_{dq} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$+ \omega \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & L_m/(L_r L_\sigma) \\ 0 & 0 & -L_m/(L_r L_\sigma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1/L_\sigma & 0 \\ 0 & 1/L_\sigma \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = [i_{sd} \quad i_{sq} \quad \psi_{rd} \quad \psi_{rq}]^T, \quad \mathbf{u}_1 = [u_{sd} \quad u_{sq}]^T, \quad y_1 = f_2(\mathbf{x}_1) = \frac{3}{2} P \cdot \frac{L_m}{L_r} \cdot |\boldsymbol{\psi}_r \times \mathbf{i}_s|$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{u}_2$$

$$y_2 = \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \quad (18)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -k_\omega P/J & -k_\theta P/J \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} P/J & -P/J \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} m_e \\ m_{opt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ m_{opt} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}$$

uz izdvojene definicije nelinearnih funkcija f_1 i f_2 :

$$\mathbf{A}_1 = f_1(\mathbf{x}_2) = f_1(\theta, \omega)$$

$$m_e = y_1 = f_2(\mathbf{x}_1) = \frac{3}{2}P \cdot \frac{L_m}{L_r} \cdot (\psi_{rd} \cdot i_{sq} - \psi_{rq} \cdot i_{sd}) \quad (19)$$

Prvi podsistem je modelovan sa (17), i opisuje dinamiku uspostavljanja struja statora i flukseva rotora kroz namotaje statora i rotora AM kao vektora stanja sistema $\mathbf{x}_1$. Eksitacioni ulazni signal predstavlja vektor napona statora $\mathbf{u}_1$. Matrica sistema $\mathbf{A}_1$ i upravljačka matrica $\mathbf{B}_1$ su definisani u okviru (17). Efekti elektromagnetnog sprežanja osa statora i rotora su predstavljeni vandijagonalnim elementima unutar matrice sistema $\mathbf{A}_1$ i modeluju indukovanje elektromotornih sila usled obrtanja rotora i obrtnog polja (EMS članovi u funkciji ω_{dq} i ω). Adaptivni parametri ω_{dq} i ω predstavljaju funkcije stanja oba podsistema, stoga i matrica sistema $\mathbf{A}_1$ predstavlja u opštem slučaju nelinearnu funkciju stanja $f_1(\mathbf{x}_2)$. Izlaz iz sistema y_1 odgovara nelinearnoj funkciji vektora stanja $\mathbf{x}_1$ na osnovu koje se može generisati elektromagneti moment mašine m_e .

Mehanički podsistem podrazumeva relacije koje povezuju mehaničke koordinate stanja, brzine obrtanja i pozicije rotora objedinjene u vektoru stanja $\mathbf{x}_2$, sa upravljačkim ulazom koji obuhvata razvijene momente na vratilu mašine $\mathbf{u}_2$. U ovom slučaju eksitacioni vektor $\mathbf{u}_2$ uključuje nelinearnu zavisnost stanja prethodnog podsistema $f_2(\mathbf{x}_1)$ tj. elektromagnetni momenat mašine m_e kao i dodatnu komponentu momenta mehaničkog opterećenja m_{opt} . Matrica sistema $\mathbf{A}_2$ i upravljačka matrica $\mathbf{B}_2$, u skladu sa Njutnovim jednačinama za obrtno kretanje, karakterišu pomenute međudnose, dok relacija izlaza sa matricom $\mathbf{C}_2$ uzima u obzir i ugao rotora kao izlaz. Iako eksplicitna funkcionalnost pozicije θ u matricama stanja oba podsistema (17) i (18) ne postoji, ova veličina je ključna za kontrolerski deo pogona i napredni upravljački koncept AM .

Prikazane nelinearne funkcije f_1 i f_2 u (19) opisuju mehanizme sprežanja elektromagnetnog i mehaničkog podsistema AM . Izlaz elektromagnetnog podsistema se sintetizuje kroz $f_2(\mathbf{x}_1)$ u elektromagnetni moment kao ulaz u mehanički podsistem dok se uticaj mehanike na elektromagnetne pojave modeluje kroz $f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, tj. komponente usled indukovanja EMS u namotajima rotora usled obrtanja rotora u magnetnom polju fluksa rotora.

Tretman modela AM u prostoru stanja (17)–(19) omogućuje uvid u niz osobina sistema:

- Model AM je nelinearan, šestog reda,
- Sistem je podesno definisan bez potencijalnih kontura algebarskih petlji,
- Ne postoje direktni uticaji ulaza na izlaze – direktne $\mathbf{D}$ matrice podsistema su nulte,
- Matrični zapis koji po formi odgovara linearnim sistemima navodi na mogućnost tretiranja pojedinih stanja kao sporopromenljivih adaptivnih parametara, čime se značajno redukuje nivo nelinearnosti i olakšava analiza i sinteza upravljanja,
- Sistem poseduje osobinu potpune kontrolabilnosti, $\text{rang}\{B|AB| \dots |A^{n-1}B\} = n, n = 4$
- Sistem poseduje osobinu potpune observabilnosti, $\text{rang}\{C^T|A^T C^T| \dots |A^{n-1} C^T\} = n, n = 4$
- Forma je pogodna za razvoj simulacionog modela i prilagodljiva je alatima numeričke analize.

Sistem jednačina (17)–(19), uz navedene osobine, predstavlja osnovu za implementaciju simulacionog modela AM u režimu naponskog napajanja.

RAČUNARSKE VEŽBE:

- *Simulacija I: Konstrukcija modela u Simulink okruženju MATLAB programskog paketa*
 - naponski model *AM* u prostoru stanja sa varijablama strujom statora i fluksom rotora;
 - parametrizacija modela;
- *Simulacija II: Naponsko napajanje AM*
 - direktan start *AM* sa nazivnim naponom napajanja;
 - problem polaznih struja;
 - tranzijentne pojave i dinamička karakteristika *AM*;
 - neopterećeno stanje i struja magnećenja;
 - odziv na poremećaj u vidu opterećenja i klizanje;
 - uticaj promene parametra mehaničke inercije na izgled momentne karakteristike *AM*;
- *Simulacija III: U/f strategija u otvorenoj sprezi*
 - delimično rešenje problema polaznih struja;
 - tranzijente pojave i sprezanje osa;
 - trofazni sinusni modulator i naponski inverter;
- *Simulacija IV: U/f strategija u zatvorenoj sprezi*
 - ograničenje klizanja *AM* i rešenje problema polaznih struja;
 - kvalitet dinamičkih pojava i nelinearna zavisnost momenta od klizanja;
 - trofazni sinusni modulator i naponski inverter + regulator brzine obrtanja;
 - odabira pojačanja regulatora!