

VEŽBA VIII VEKTORSKI MODEL NAPONSKI NAPAJANE PMSM

Matematički model u dq domenu sa primenjenim vektorskim kontrolerom

Vektorski model naponski napajane sinhronne mašine sa permanentnim magnetima na rotora, *PMSM* (engl. *Permanent Magnet Synchronous Machine*), se sastoji od skupa diferencijalnih i algebarskih jednačina koje opisuju proces elektromehaničke konverzije energije. Vektorski model podrazumeva orijentaciju podužne ose dq koordinatnog sistema na vektor fluksa rotora (permanentnog magneta)!

Model je dat jednačinama (1)–(7) u razvijenom obliku u sinhrono–rotirajućem dq koordinatnom sistemu osa:

- (Diferencijalne) jednačine naponske ravnoteže namotaja statora:

$$u_{sd} = R_s \cdot i_{sd} + \frac{d}{dt} \psi_{sd} - \omega \cdot \psi_{sq} \quad (1)$$

$$u_{sq} = R_s \cdot i_{sq} + \frac{d}{dt} \psi_{sq} + \omega \cdot \psi_{sd} \quad (2)$$

- (Algebarske) jednačine fluksnih obuhvata namotaja statora:

$$\psi_{sd} = L_d \cdot i_{sd} + \psi_{PM} \quad (3)$$

$$\psi_{sq} = L_q \cdot i_{sq} \quad (4)$$

- (Diferencijalne) jednačine mehaničke ravnoteže (5) i definicioni obrazac koji povezuje koordinate električne brzine obrtanja i ugla rotora (6):

$$m_{el} - m_{opt} = \frac{J}{P} \cdot \frac{d\omega}{dt} + k_\omega \cdot \omega + k_\theta \cdot \theta \quad (5)$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad (6)$$

- Definicioni obrazac za momenat konverzije mašine (7):

$$m_{el} = \frac{3}{2} P \cdot (\psi_{sd} \cdot i_{sq} - \psi_{sq} \cdot i_{sd}) \quad (7)$$

gde su terminalne varijable mašine:

- u_{sd}, u_{sq} – komponente vektora napona statorskog namotaja;
- i_{sd}, i_{sq} – komponente vektora struje statorskog namotaja;
- ψ_{sd}, ψ_{sq} – komponente vektora fluksnog obuhvata statorskog namotaja;
- ω, θ – sinhrona ugaona brzina (brzina dq sistema i ujedno i električna ugaona brzina obrtanja rotora), električni ugao rotora, respektivno;
- m_{el}, m_{opt} – elektromagnetni momenat mašine i momenat opterećenja, respektivno;

uz koeficijente modela redom:

- R_s – električna otpornost namotaja statora;
- L_d, L_q – sinhronne rasipne induktivnosti po d i q osi namotaja statora, respektivno;
- ψ_{PM} – fluks permanentnog magneta na rotoru;
- J – mehanički momenat inercije;
- P – broj pari polova SM ;
- k_ω – koeficijent sile trenja;
- k_θ – koeficijent sile istezanja opruge ili torzije.

Matematički model (1)–(7) se eksplicitno odnosi na varijantu *PMSM* gde su permanentni magneti utisnuti u rotor, tzv. *IPMSM* (engl. *Interior PMSM*) gde važi $L_d < L_q$. Prikazani model *IPMSM* je istovremeno moguće iskoristiti i za simulaciju procesa elektromehaničke konverzije ostalih varijanti *PMSM*:

- sa permanentnim magnetima postavljenim po površini rotora, *SPMSM* (engl. *Surface PMSM*) – slučaj $L_d = L_q = L_s$, L_s predstavlja sinhronu rasipnu induktivnost;
- reluktantna sinhrona mašina, *SyncRM* (engl. *Synchronous Reluctance Machine*) – slučaj $\psi_{PM} = 0, L_d > L_q$ kada se proces konverzije energije oslanja isključivo na magnetsku anizotropiju rotora (reluktantna svojstva)!

Izvođenje matematičkog modela PMSM u dq domenu u prostoru stanja

Za potrebe razvijanja simulacionih modela kao i analize dinamičkih procesa neophodno je model prevesti u formu prostora stanja sa *odgovarajućim* promenljivama stanja.

Elektromagnetni podsistem (1) – (4) nelinearnog sistema (1) – (7) će se predstaviti u formi prostora stanja sa promenljivama stanja i_{sd} i i_{sq} i sa tretmanom ugaone brzine obrtanja rotora ω kao adaptivnog parametara. Uvrštavanjem relacija za fluksne obuhvate (3)–(4) u jednačine naponske ravnoteže (1)–(2) dobija se:

$$u_{sd} = R_s \cdot i_{sd} + L_d \cdot \frac{d}{dt} i_{sd} - \omega \cdot L_q \cdot i_{sq} \quad (8)$$

$$u_{sq} = R_s \cdot i_{sq} + L_q \cdot \frac{d}{dt} i_{sq} + \omega \cdot L_d \cdot i_{sd} + \omega \cdot \psi_{PM} \quad (9)$$

Odgovarajućim matematičkim preuređenjem dobija se elektromagnetski podsistem u prostoru stanja:

$$\frac{d}{dt} i_{sd} = -\frac{R_s}{L_d} \cdot i_{sd} + \frac{\omega \cdot L_q}{L_d} \cdot i_{sq} + \frac{1}{L_d} \cdot u_{sd} + 0 \cdot u_{sq} \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt} i_{sq} = -\frac{\omega \cdot L_d}{L_q} \cdot i_{sd} - \frac{R_s}{L_q} \cdot i_{sq} + 0 \cdot u_{sd} + \frac{1}{L_q} \cdot u_{sq} - \frac{\omega \cdot \psi_{PM}}{L_q} \quad (11)$$

koji se može zapisati direktno u matričnoj notaciji kao:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_s/L_d & \omega \cdot L_q/L_d \\ -\omega \cdot L_d/L_q & -R_s/L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{sd} \\ i_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_d & 0 \\ 0 & 1/L_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sd} \\ u_{sq} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega \cdot \psi_{PM}/L_q \end{bmatrix} \quad (12)$$

Mehanički podsistem (5) – (7) nelinearnog sistema (1) – (7) će se predstaviti u formi prostora stanja sa promenljivama stanja ω i θ i upravljačkim ulazom u vidu vektora momenta koga sačinjavaju elektromagnetni moment m_e i poremećaj u vidu momenta opterećenja m_{opt} :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_\omega \cdot P/J & -k_\theta \cdot P/J \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P/J & -P/J \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_e \\ m_{opt} \end{bmatrix} \quad (13)$$

gde je elektromagnetski momenat izražen u funkciji isključivo vektora struje statora (uvrštavanjem (3)–(4) u (7)):

$$m_{el} = \frac{3}{2} P \cdot [\psi_{PM} \cdot i_{sq} + (L_d - L_q) \cdot i_{sd} \cdot i_{sq}] = m_{el}^1 + m_{el}^2 \quad (14)$$

Razlikuju se dva mehanizma generisanja momenta u (14):

- osnovna komponenta momenta m_{el}^1 : podrazumeva interakciju konstantnog magnetskog polja rotora od permanentnog magnetu sa fluksom ψ_{PM} i poprečne komponente struje statora i_{sq} :

$$m_{el}^1 = \frac{3}{2} P \cdot \psi_{PM} \cdot i_{sq} \quad (15)$$

- reluktantna komponenta momenta m_{el}^2 : eksploatiše magnetsku anizotropiju zazora po obodu između statora i rotora $L_d \neq L_q$ kada se sadejstvom obe komponente vektora struje statora, i podužne i_{sd} i poprečne i_{sq} , obrazuju magnetski polovi i generiše momenat konverzije:

$$m_{el}^2 = \frac{3}{2} P \cdot (L_d - L_q) \cdot i_{sd} \cdot i_{sq} \quad (16)$$

Predstava modela PMSM putem dva međusobno spregnuta dinamička sistema u matričnoj formi prostora stanja:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = (\mathbf{A}_1^{const} + \mathbf{A}_1^\omega) \cdot \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{w} \\ y_1 &= f_2(\mathbf{x}_2) \\ \mathbf{A}_1 &= \mathbf{A}_1^{const} + \mathbf{A}_1^\omega = f_1(\mathbf{x}_2) = \begin{bmatrix} -R_s/L_d & \omega \cdot L_q/L_d \\ -\omega \cdot L_d/L_q & -R_s/L_q \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -R_s/L_d & 0 \\ 0 & -R_s/L_q \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} 0 & L_q/L_d \\ -L_d/L_q & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} 1/L_d & 0 \\ 0 & 1/L_q \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_1 &= [i_{sd} \quad i_{sq}]^T, \quad \mathbf{u}_1 = [u_{sd} \quad u_{sq}]^T \\ y_1 &= f_2(\mathbf{x}_1) = \frac{3}{2}P \cdot [\psi_{PM} \cdot i_{sq} + (L_d - L_q) \cdot i_{sd} \cdot i_{sq}], \quad \mathbf{w} = [0 \quad -\omega \cdot \psi_{PM}/L_q]^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_2\end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -k_\omega P/J & -k_\theta P/J \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} P/J & -P/J \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_2 &= \begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} m_e \\ m_{opt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ m_{opt} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \end{bmatrix}\end{aligned}$$

uz izdvojene definicije nelinearnih funkcija f_1 i f_2 :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 &= f_1(\mathbf{x}_2) = f_1(\theta, \omega) \\ m_e &= y_1 = f_2(\mathbf{x}_1) = \frac{3}{2}P \cdot [\psi_{PM} \cdot i_{sq} + (L_d - L_q) \cdot i_{sd} \cdot i_{sq}]\end{aligned} \quad (19)$$

Prvi podsistem je modelovan sa (17), i opisuje dinamiku uspostavljanja struja statora kroz namotaje statora *PMSM* kao vektora stanja sistema $\mathbf{x}_1$. Eksitacioni ulazni signal predstavlja vektor napona statora $\mathbf{u}_1$. Matrica sistema $\mathbf{A}_1$ i upravljačka matrica $\mathbf{B}_1$ su definisani u okviru (17). Efekti elektromagnetnog sprežanja osa statora su predstavljeni vandijagonalnim elementima unutar matrice sistema $\mathbf{A}_1$. Izlaz iz sistema y_1 odgovara nelinearnoj funkciji vektora stanja $\mathbf{x}_1$ na osnovu koje se može generisati elektromagneti moment mašine m_e . Poremećaj u podsistemu u vidu indukovane elektromotorne sile usled obrtanja rotora je sadržan u okviru vektora $\mathbf{w}$.

Mehanički podsistem podrazumeva relacije koje povezuju mehaničke koordinate stanja, brzine obrtanja i pozicije rotora objedinjene u vektoru stanja $\mathbf{x}_2$, sa upravljačkim ulazom koji obuhvata razvijene momente na vratilu mašine $\mathbf{u}_2$. U ovom slučaju eksitacioni vektor $\mathbf{u}_2$ uključuje nelinearnu zavisnost stanja prethodnog podsistema $f_2(\mathbf{x}_1)$ tj. elektromagnetni momenat mašine m_e kao i dodatnu komponentu momenta mehaničkog opterećenja m_{opt} . Matrica sistema $\mathbf{A}_2$ i upravljačka matrica $\mathbf{B}_2$, u skladu sa Njutnovim jednačinama za obrtno kretanje, karakterišu pomenute međudnose, dok relacija izlaza sa matricom $\mathbf{C}_2$ uzima u obzir i ugao rotora kao izlaz.

Prikazane nelinearne funkcije f_1 i f_2 u (19) opisuju mehanizme sprežanja elektromagnetnog i mehaničkog podsistema *PMSM*. Izlaz elektromagnetnog podsistema se sintetizuje kroz $f_2(\mathbf{x}_1)$ u elektromagnetni moment kao ulaz u mehanički podsistem dok se uticaj mehanike na elektromagnetne pojave modeluje kroz $f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Tretman modela *PMSM* u prostoru stanja (17)–(19) omogućuje uvid u niz osobina sistema:

- Model *PMSM* je nelinearan, četvrtog reda,
- Sistem je podesno definisan bez potencijalnih kontura algebarskih petlji,

- Ne postoje direktni uticaji ulaza na izlaze – direktne $\mathbf{D}$ matrice podsistema su nulte,
- Matrični zapis koji po formi odgovara linearnim sistemima navodi na mogućnost tretiranja pojedinih stanja kao sporopromenljivih adaptivnih parametara, čime se značajno redukuje nivo nelinearnosti i olakšava analiza i sinteza upravljanja,
- Sistem poseduje osobinu potpune kontrolabilnosti, $\text{rang}\{B|AB| \dots |A^{n-1}B\} = n$,
- Sistem poseduje osobinu potpune observabilnosti, $\text{rang}\{C^T|A^T C^T| \dots |A^{n-1} C^T\} = n$,
- Forma je pogodna za razvoj simulacionog modela i prilagodljiva je alatima numeričke analize.

Sistem jednačina (17)–(19), uz navedene osobine, predstavlja osnovu za implementaciju simulacionog modela vektorskog *PMSM* u režimu naponskog napajanja.

CRVSI u pogonu sa PMSM

Vektorska kontrola *PMSM* podrazumeva da kontroler zadaje referentne vrednosti vektora struje statora $\mathbf{i}_s^{ref}(s)$. Kako se razmatra naponski model *PMSM* sa *dq* sistemom orijentisanim na fluks permanentnog magneta neophodno je obezbediti koncept *CRVSI*.

Za objekat upravljanja opisan relacijama (8)–(9) konstruiše se *CRVSI* kontroler:

$$\mathbf{u}_s^{reg}(s) = \mathbf{G}_{PI}(s) \cdot (\mathbf{i}_s^{ref}(s) - \mathbf{i}_s(s)), \quad \mathbf{G}_{PI}(s) = \begin{bmatrix} K_{Pd} + \frac{K_I}{s} & 0 \\ 0 & K_{Pq} + \frac{K_I}{s} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{u}_s(s) = \mathbf{u}_s^{reg}(s) + \omega \begin{bmatrix} 0 & -L_q \\ L_d & 0 \end{bmatrix} \mathbf{i}_s(s) \quad (21)$$

gde su K_{Pd} i K_{Pq} proporcionalna pojačanja po *d* i *q* osi *PI* regulatora vektora struje statora funkcije prenosa $\mathbf{G}_{PI}(s)$, dok je K_I vrednost integralnog pojačanja!

U cilju unapređenja dinamičkih performansi odziva primenjuje se tehnika direktnog raspredanja osa primenom *feed-forward* mehanizma (21), kada se na izlaz iz regulatora struje $\mathbf{u}_s^{reg}(s)$ superponira korektivna akcija koja raspreže dinamike naponskih osa u *dq* sistemu poništavajući komponente padova napona usled rotacije koordinata osa!

Sinteza parametara regulatora (20) vrši na sledeći način:

$$K_{Pd} = \lambda \cdot L_d, \quad K_{Pq} = \lambda \cdot L_q, \quad K_I = \lambda \cdot R_s \quad (22)$$

gde je λ željeni propusni opseg petlji struje!

RAČUNARSKE VEŽBE:

- *Simulacija I: Konstrukcija modela u Simulink okruženju MATLAB programskog paketa*
 - naponski model vektorske *PMSM* u prostoru stanja sa varijablama stanja komponentama vektora struje statora;
 - parametrizacija modela;
- *Simulacija II: CRVSI – sinteza PI regulatora po metodi kompenzacije dominantne vremenske konstante u analognom domenu sa proizvoljnim propusnim opsegom i feed-forward kompenzacijom*